1. Fie $x, y, z \in [1, \infty)$. Să se arate că
   $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \frac{x+y+z+24}{6}$. În ce caz avem egalitatea?

2. Să se determine numărul natural n care verifică egalitatea
   $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} = \frac{31-6^n}{30^n}$.

3. Să se determine numerele întregi n şi p care verifică relaţia
   $\frac{1}{5n^2+1} \leq \frac{p}{2} \leq \frac{1}{4n^2+1}$.

4. Să se determine cel mai mic număr natural a cu proprietăţile :
   9 divide pe a, 8 divide pe $a+1$, 7 divide pe $a+2$.

5. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere naturale nenule disticte două câte două astfel încât $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 + n - 2$ şi mulţimile
   A = $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, B = $\{2k+1 | k \in \mathbb{N}\}$. Demonstraţi că mulţimea $A \cap B$ are cel puţin două elemente.

6. Fie $A = \{n \in \mathbb{N} | n = \overline{xyz} + \overline{yzx} + \overline{zxy}\}$ şi B = $\{k^2 | k \in \mathbb{N}\}$. Arătaţi că $\cap B = \emptyset$.

7. Să se determine cifrele a și b care verifică egalitatea
   $\overline{ab}\ (10a + 10b + 1)$ = 2013 .

Soluţii :

1. Adunând inegalităţile

   $\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2 = x+8-6\sqrt{x-1} \geq 0$, $\left(\sqrt{y-1}-3\right)^2 = y+8-6\sqrt{y-1} \geq 0$

   $\left(\sqrt{z-1}-3\right)^2 = z+8-6\sqrt{z-1} \geq 0$, rezultă egalitatea din enunţ, cazul de egalitate se realizează pentru $x = y = z = 10$.

2. Va rezulta $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}=\frac{31}{30^n}$, sau, înmulţind cu 30^n, rezultă

$15^n + 10^n + 6^n = 31$. Se observă soluţia $n = 1$, $n = 0$ nu verifică, iar pentru $n > 1$ va rezulta

   $15^n + 10^n + 6^n > 31$. Deci n = 1 este singura soluţie.

3. Dacă $|n| \geq 1$ va rezulta $0 < \frac{1}{5n^2+1} \leq \frac{p}{2} \leq \frac{1}{4n^2+1} < \frac{1}{2}$, care nu are soluţie $p \in \mathbb{Z}$.

   Pentru $n = 0$, rezultă $1 \leq \frac{p}{2} \leq 1$, deci $p = 2$.

4. Va rezulta $a = 9k$, 8 divide $9k + 1 = 8k + k + 1$, deci 8 divide $k + 1$ (1)

   7 divide $9k + 2 = 7k + 2k + 2$ deci 7 divide $2(k + 1)$, adică 7 divide $k + 1$ (2)

   Din (1) şi (2) rezultă 56 divide $k + 1$, cel mai mic număr k fiind 55, deci $a = 495$.

5. Deoarece suma primelor n numere pare nenule este

   $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + 2 \cdot n = n(n+1) = n^2 + n$ rezultă că cel puţin unul din numere este impar. Dacă ar fi un singur număr impar şi celelalte pare, suma ar fi impară,dar numărul $n^2 + n - 2$ este par, deci cel puţin două numere sunt impare.

6. Va rezulta $n = 111\,(x+y+z) = 3 \cdot 37(x+y+z)$. Deoarece x, y, z sunt cifre suma $x + y + z$ este mai mică decât 37, deci 37, care este număr prim , apare la puterea întâi în descompunerea lui n, deci n nu este pătrat perfect şi $A \cap B = \emptyset$.

7. Deoarece $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, numărul $\overline{ab}$ poate fi 11, 33 sau 61. Relaţia este verificată de $\overline{ab}$ = 33, adică $a = b = 3$